ばね・粘性・慣性・分数微分要素で構成される直並列結合モデルの汎用的縮約法

その１ 擬似静的要素を用いた1自由度縮約

山崎 久雄（ユニオンシステム）
○國光 修五（ユニオンシステム）
野牧 貴行（ユニオンシステム）
金子 健作（　東京工業大学　）
笠井 和彦（　東京工業大学　）

はじめに

- 各種制振ダンパーには，その力の発揮機構に基づく様々な解析モデルが提案されている。
- これらは，ばね・粘性・慣性・分数微分構成則要素から必要な要素を１軸に複数結合したものが多く，結合形態も多様である。
- 本研究は，各種制振ダンパーモデルの解析プログラムへの適切かつ効率的な導入を目的に，ばね・粘性・慣性・分数微分要素で構成される直並列結合モデルを，支持ばねも含めて１自由度に縮約する汎用的手法を提案する。
- ダンパーモデルが１自由度に縮約できれば，モデル内の自由度が除去でき，振動解析モデルに容易に付加できる。

擬似静的要素の定義

微小時間 Δt における力増分ΔF が変位増分 ΔU を用いて，
次式の一般形で表すことのできる要素を
「擬似静的要素」と定義する。

$$\Delta F = K^* \Delta U - F^* \qquad (1)$$

K^* : 擬似ばね定数

F^* : 調整力

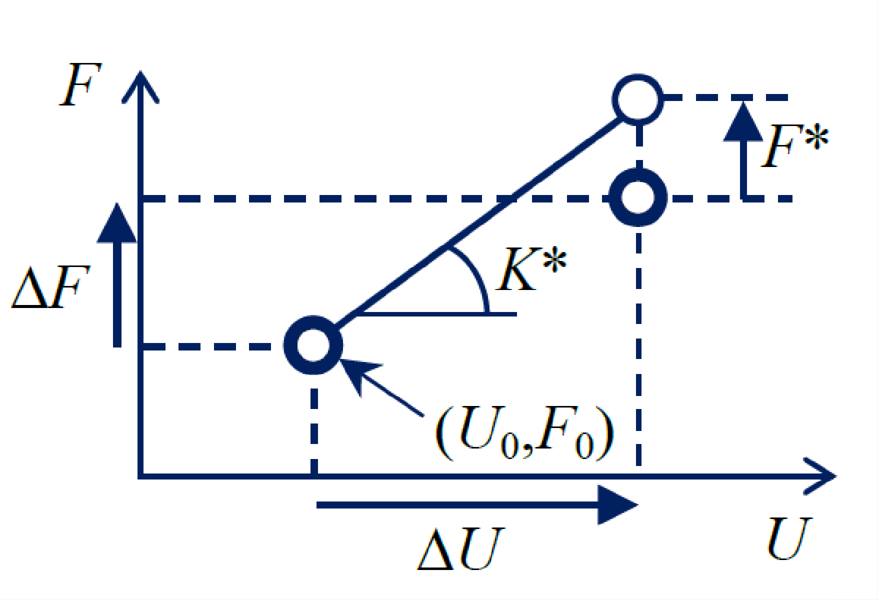


図1 擬似静的要素の概念図

ばね・粘性・慣性要素の擬似静的要素表現

力増分 ΔF は変位増分ΔU，速度増分$\Delta \dot{U}$，
加速度増分$\Delta \ddot{U}$ を用いて次式で表せる。

ばね要素 $$\Delta F = K\Delta U \tag{2a}$$

粘性要素 $$\Delta F = C\Delta \dot{U} = \frac{j}{\Delta t} C\Delta U - jC\dot{U}_0 \tag{4a}$$

慣性要素 $$\Delta F = M\Delta \ddot{U} = \left(\frac{j}{\Delta t}\right)^2 M\Delta U - jM\left(\frac{j}{\Delta t}\dot{U}_0 + \ddot{U}_0\right) \tag{4b}$$

$\dot{U}_0, \ddot{U}_0$ ：前ステップの速度，加速度

$$\begin{cases} j=1 \quad \Delta U = \Delta t\dot{U} \\ j=2 \quad \Delta U = \dfrac{\Delta t\left(\dot{U}+\dot{U}_0\right)}{2} \end{cases}$$

分数微分要素の擬似静的要素表現

分数微分要素の力Fは変位Uを用いて次式で表す。

$$F + aD^{\alpha}F = K_e\left(U + bD^{\alpha}U\right) \qquad (5)$$

D^{α} ：分数微分演算子 $\left(= d^{\alpha}/dt^{\alpha}\right)$

a, b, α ：モデルパラメータ

K_e ：静的剛性

D^{α} を数値積分することで逐次計算におけるn-Stepでの力 F_n と変位 U_n の関係は次式の形で表せる。

$$F_n + a\sum_{l=0}^{L}\left(w^{(l)}F_{n-l}\right) = K_e\left\{U_n + b\sum_{l=0}^{L}\left(w^{(l)}U_{n-l}\right)\right\} \qquad (6)$$

L ：数値積分点の数

$w^{(l)}\left(l = 0 \sim L\right)$ ：数値積分点の重み係数

分数微分要素の擬似静的要素表現

式(6)を式変形すると，力増分ΔFは変位増分ΔU を用いて次式となる。

$$\Delta F = \frac{B}{A} K_e \Delta U - \left(F_0 - \frac{B}{A} K_e U_0 - \frac{1}{A} \Phi_0 \right) \tag{8}$$

F_0, U_0 は前Stepの力，変位

$$A = 1 + a w^{(0)} \tag{7b}$$

$$B = 1 + b w^{(0)} \tag{7c}$$

$$\Phi_0 = \sum_{l=1}^{L} \left\{ w^{(l)} \left(b K_e U_{n-l} - a F_{n-l} \right) \right\} \tag{7d}$$

擬似静的要素表現

K^*, F^* をそれぞれ次式とすることでいずれも式(1)の形 $\Delta F = K^* \Delta U - F^*$ となり，擬似静的要素として統一的に表現できる。

ばね要素

$$K^* = K, \quad F^* = 0 \tag{9a,b}$$

粘性要素

$$K^* = \frac{j}{\Delta t} C, \quad F^* = jC\dot{U}_0 \tag{10a,b}$$

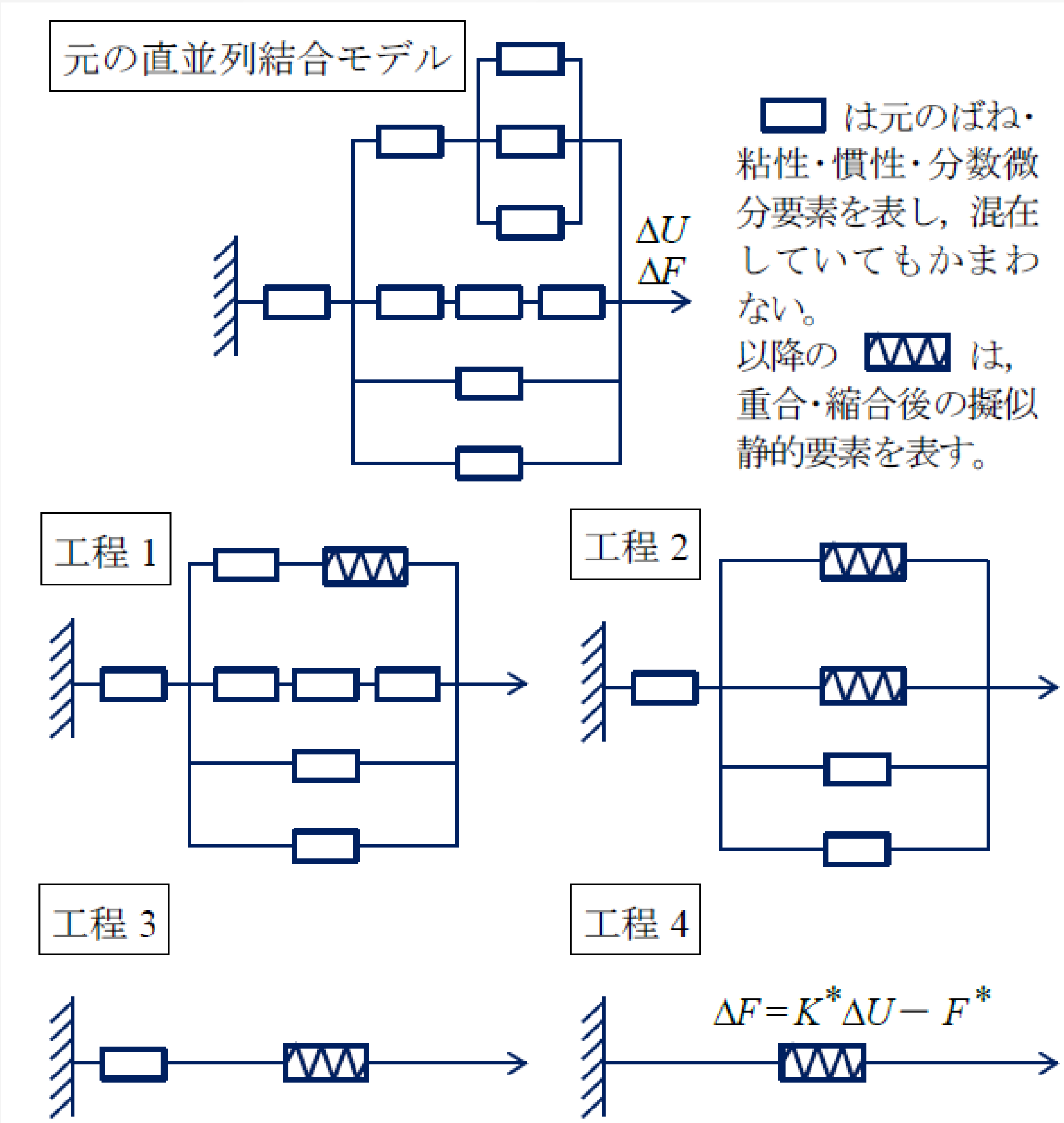
慣性要素

$$K^* = \left(\frac{j}{\Delta t} \right)^2 M, \quad F^* = jM \left(\frac{j}{\Delta t} \dot{U}_0 + \ddot{U}_0 \right) \tag{11a,b}$$

分数微分要素

$$K^* = \frac{B}{A} K_e, \quad F^* = F_0 - K^* U_0 - \frac{1}{A} \Phi_0 \tag{12a,b}$$

重合と縮合の繰返し



並列結合の重合

$$\begin{cases} K^* = \sum_i K_i^* & \text{(14a)} \\ F^* = \sum_i F_i^* & \text{(14b)} \end{cases}$$

直列結合の縮合

$$\begin{cases} K^* = 1 \Big/ \sum_i \dfrac{1}{K_i^*} & \text{(17a)} \\ F^* = K^* \left(\sum_i \dfrac{F_i^*}{K_i^*} \right) & \end{cases}$$

(17b)

個々の要素の応答値算出

モデルに対する変位増分 ΔU が与えられると，
式(1) $\Delta F = K^{*}\Delta U - F^{*}$ より力増分 ΔF が求まり，
ダンパー力の候補値 $\tilde{F}\left(= \Delta F + F_0\right)$ を得る。

- すべての要素が線形： $F = \tilde{F}$
- 非線形要素を含む場合：その要素の再評価と反復計算によってダンパー力 F を確定する。

一方， F^{*} には，要素の線形・非線形に関わらず過去の応答値が含まれる（増分量ではないため）ため，個々の要素の F_i^{*} を逐次計算する必要がある。

F^{*} の更新に必要な個々の要素の変位、速度、加速度は縮約時の工程を逆に辿りながら順次求めていく。

まとめ

ばね・粘性・慣性・分数微分要素から必要要素が1軸に様々な形態で結合された制振ダンパーモデルを，解析プログラムに適切にかつ効率的に導入するための1自由度縮約法を提案した。

① ばね・粘性・慣性・分数微分要素は（微積分次数が異なるが）すべて擬似静的要素として統一的に表現できる

② 直並列結合モデルでは，並列結合の重合や直列結合の縮合により新しい擬似静的要素とでき，それを繰り返すことで最終的に1つの擬似静的要素に縮約できる

③ 逐次処理に必要な個々の要素の応答値が算出できる

また，擬似静的要素は増分表現であるため非線形要素に直接対応できる。